

ANÁLISIS DE RIESGO Y CONFIABILIDAD DE SISTEMAS DE RETENCIÓN PARA EL MANEJO DE LA ESCORRENTÍA PLUVIAL¹

Rafael Segarra García²

Resumen: El desarrollo urbanístico ha tenido como consecuencia el incremento en la frecuencia y magnitud de la ocurrencia de inundaciones locales, con el potencial de ocasionar graves daños a la infraestructura y rutas viales existentes. En este estudio se desarrolla un modelo probabilístico que permite evaluar la eficiencia operacional de un sistema de retención de escorrentía pluvial en términos del riesgo y la confiabilidad con respecto a desbordamientos de dicho sistema. Se evalúa la confiabilidad de un sistema de retención considerando la variabilidad del proceso de escorrentía y en función de sus variables de diseño. El modelo es de naturaleza analítica y sería de utilidad en la fase de planificación para el diseño de sistemas de manejo de escorrentía pluvial. Se han validado los resultados del modelo probabilístico con resultados de simulaciones con modelos numéricos.

Palabras clave: análisis de riesgo, confiabilidad, manejo de escorrentía, modelo probabilístico, retención de escorrentía.

RISK AND RELIABILITY ANALYSIS OF DETENTION SYSTEMS FOR STORM WATER MANAGEMENT

Abstract: Urban development has had the consequence of increasing the frequency and magnitude of local flooding, with the potential of causing severe infrastructure and roadway damage. This study develops a probabilistic model that allows for the evaluation of the operational efficiency of a storm water detention system in terms of risk and reliability as related to system overflows. The detention system's reliability is assessed in terms of its design variables, while also accounting for the variability of the storm runoff process. The model is analytic in nature, and will be useful at the planning stage of the design of storm water management systems. The results of the probabilistic model have been validated with results from numerical simulation models.

Keywords: probabilistic model, risk analysis, reliability, stormwater management, stormwater detention.

INTRODUCCIÓN

El manejo de la escorrentía pluvial mediante el diseño de sistemas de retención, ya sea mediante charcas u otro tipo de estructura, constituye una herramienta comúnmente utilizada en proyectos de desarrollo urbanístico, motivado en gran medida por la necesidad de controlar problemas severos de inundación o la carga de contaminantes dispersos que se vierten al ambiente de una forma desmedida. En variadas jurisdicciones, el manejo de la escorrentía pluvial ha adquirido un matiz legal mediante la incorporación de requisitos específicos de control en reglamentos y normas de diseño que persiguen proteger las áreas receptoras de descargas pluviales que puedan afectar vidas y propiedades.

El diseño de los sistemas de retención de escorrentía requiere, fundamentalmente, la determinación de la capacidad de almacenaje y la tasa a la cual se debe extraer la cantidad interceptada para minimizar el riesgo de un desbordamiento descontrolado el cual pueda ocasionar daños no-intencionados al ambiente o a la propiedad. El problema mayor que existe en cuanto al diseño de dichas instalaciones surge de la variabilidad natural del proceso de escorrentía, el cual dificulta en extremo el proceso de diseño y evaluación de estos sistemas. Dicha variabilidad no permite la utilización eficiente de métodos determinísticos para la evaluación operacional de las instalaciones para el manejo de la escorrentía.

¹ Artículo recibido el 28 de noviembre de 2008 y aceptado para publicación el 25 de mayo de 2009.

² Catedrático, Departamento de Ingeniería Civil y Agrimensura, Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez, PR 00680-9000. rafael.segarra@upr.edu

Tradicionalmente se han utilizado métodos probabilísticos o la simulación a tiempo real de los sistemas de manejo para evaluar las características operacionales de estos sistemas. La simulación usualmente se sirve de modelos tal como el *Storm Water Management Model* (SWMM), el cual permite la simulación continua de un sistema de manejo con escurrimientos derivadas de un historial horario de lluvias dentro de un período de un año o mayor. Representativo de los métodos probabilísticos son aquellos que utilizan la técnica de las funciones de variables aleatorias para derivar distribuciones de las variables operacionales del sistema analizado.

Los métodos probabilísticos en esta disciplina usualmente se estructuran mediante la expresión de la capacidad de almacenaje actual del sistema condicionada en el almacenaje residual al finalizar el evento de lluvia previo a la ocurrencia del evento presente. Durante el período de tiempo entre eventos de lluvia consecutivos el sistema puede vaciarse, enteramente o parcialmente, en función de la tasa de extracción de la escurrimiento almacenado, ya sea por infiltración, bombeo o evaporación. La estructura probabilística de dichas formulaciones es de tipo Markov ya que las probabilidades de estado actual del sistema [en la etapa (n)] están condicionadas en el estado anterior de éste [etapa ($n-1$)]. La aplicación fundamental de los métodos ha consistido de estipular el estado de almacenaje en la etapa ($n-1$) y condicionar la derivación para la etapa (n) en ésta (Adams and Papa, 2000).

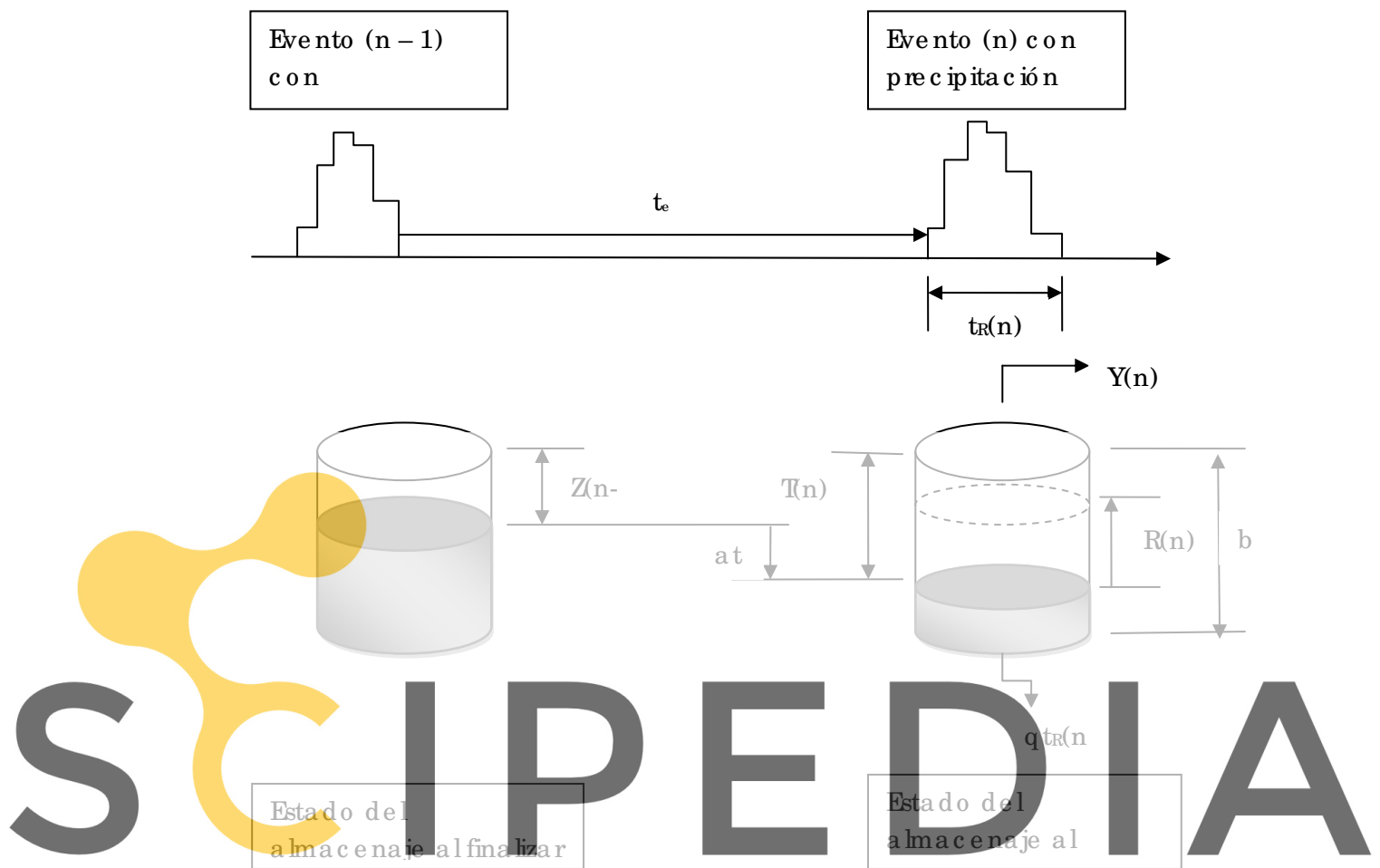
Pese a que la teoría de las cadenas de Markov en principio permitiría manipular la estructura probabilística del proceso para obtener información sobre el sistema, dicha teoría no ha sido de utilidad práctica debido a la dificultad en definir las probabilidades de transición condicionadas en el estado de almacenaje anterior. Usualmente se ha presumido un estado condicional constante, tal como la mitad de la capacidad de almacenaje del diseño del sistema, para así lograr el objetivo de obtener soluciones analíticas prácticas a la formulación (Adams and Chen, 2006; Li and Adams, 1994; 2000; Segarra and Loganathan, 1994; Loganathan et al., 1985). Aunque dicha acción permita derivar modelos prácticos, los resultados obtenidos están condicionados en la presunción del nivel de almacenaje condicional. En este estudio se relaja esta restricción con el objetivo de proveer una formulación más atemperada a la naturaleza aleatoria de la variable del estado de almacenaje.

En la formulación del modelo en esta investigación se postuló una distribución de probabilidad para el estado de almacenaje del sistema al finalizar el evento de lluvia previo ($n-1$) al evento presente (n) y de esta forma evitar utilizar un valor determinístico para esta variable. Este enfoque altera la estructura Markoviana del proceso, pero se considera más realista que el procedimiento convencional esbozado. El describir la transición del almacenaje mediante un proceso Markov presume cierta estructura para la transición de estado del sistema, principalmente que el proceso está condicionado en el estado de la etapa anterior del mismo. Dicha estructura teórica no refleja la influencia de otros procesos que afectan la transición de estado en el ciclo dinámico real de un sistema de retención. En un sistema real existen múltiples factores que influyen en la transición de estado, los cuales no pueden ser representados por un proceso teórico Markov.

Variables tales como la sedimentación y el grado de mantenimiento ejercido en el sistema de retención influyen sobre las características operacionales de dicho sistema de una forma no reproducible en un proceso estocástico estacionario. Entonces, la dinámica temporal de la capacidad de almacenaje disponible en un sistema de retención no es solamente una función del proceso climatológico, sino también de otros procesos no enteramente cuantificables en un modelo probabilístico. Basado en estas consideraciones, se formula un modelo probabilístico en el cual se considera la variabilidad del estado condicional de almacenaje de un sistema de retención de escurrimiento.

FORMULACIÓN DEL MODELO

El modelo propuesto está estructurado sobre una generalización de la formulación básica presentada por Loganathan et. al. (1985) y elaborada por Segarra and Loganathan (1992) y Segarra (2001). La expresión fundamental derivada en los estudios citados consiste de un balance de masa en una unidad de retención de escurrimiento. El proceso de llegada de tormentas se describe por un proceso de Poisson. El concepto del sistema de retención modelado se ilustra esquemáticamente en la Figura 1.



Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Figura 1. Diagrama conceptual del sistema de manejo de escorrentía.

El proceso fundamental ilustrado en la Figura 1 consiste de la secuencia de n tormentas con precipitación $P(k)$; $k = 1, 2, \dots, n-1, n$. Las tormentas independientes de duración $t_R(k)$ están separadas por un tiempo t_e , el tiempo entre eventos. Al finalizar la tormenta anterior al evento de interés (n), el sistema se encuentra con un almacenaje disponible definido por la variable $Z(n-1)$. Durante el tiempo entre eventos se sustrae agua a la tasa a , para un total volumétrico at_e . Al momento de ocurrir la tormenta en la etapa n , el sistema se encuentra con la capacidad disponible $T(n)$. El evento n produce la precipitación $P(n)$, la cual se traduce en la acumulación de escorrentía $R(n)$. Durante la duración del evento n se sustrae agua a la tasa q . La capacidad de almacenaje se reduciría o incrementaría de acuerdo a la diferencia neta entre la escorrentía interceptada, $R(n)$, y aquella sustraída, at_R . Si el sistema se desborda por una alta acumulación de escorrentía, éste desbordaría el volumen $Y(n)$.

Las variables de diseño del sistema consisten de la capacidad del almacenaje (b), la tasa de sustracción de agua durante el tiempo entre tormentas (a) y la tasa de sustracción de agua durante la duración de la tormenta (q). Dichas variables pueden combinarse en un modelo que permita computar la magnitud del almacenaje disponible en el sistema de retención, aunque éste no sería de tanto interés como la magnitud de desborde que podría ocurrir durante cierto evento. Es por esta razón que se formula el modelo en términos de la magnitud de desborde, la cual define la eficiencia operacional del sistema.

En la derivación subsiguiente se omite el índice de las etapas del proceso hidrológico ya que no existe ambigüedad en la representación de las variables en cuanto a la etapa a las cuales éstas se refieren.

La medida de eficiencia del sistema se ha denominado (Di Toro and Small, 1979) como la eficiencia de captura de escorrentía a largo plazo, expresada en términos de la variable de desborde mediante la siguiente relación:

$$\rho = 1 - \frac{E[Y]}{E[R]} \quad (1)$$

donde ρ es la eficiencia en la captura de escorrentía; $E[Y]$ es la esperanza del volumen de desborde y $E[R]$ es la esperanza del volumen de escorrentía.

Las esperanzas del volumen de desborde y de escorrentía describen el proceso a largo plazo. Luego se mostrará que la ecuación (1) describe también el riesgo asociado al desbordamiento del sistema de almacenaje. La investigación persigue obtener expresiones analíticas para la eficiencia ρ de manera que se puedan evaluar las características operacionales del sistema de almacenaje en términos de sus variables de diseño.

El volumen de desborde de cierta tormenta depende directamente de la interacción de las variables de diseño del sistema de almacenaje (a , q y b) y del estado del almacenaje de la unidad de retención al finalizar la tormenta anterior. El volumen de desborde puede expresarse mediante la relación:

$$Y = \max[R - T - q t_R, 0] \quad (2)$$

donde I es el volumen de desborde de la tormenta (mm); R es el volumen de escorrentía de la tormenta (mm); T es la capacidad de almacenaje disponible al comienzo de la tormenta (mm) y q es la tasa de sustracción de la escorrentía almacenada (mm/hr) durante la duración de la tormenta t_R .

La ecuación (2) expresa que el volumen de desborde para un evento es el sobrante de escorrentía, cuando éste exceda el total de la capacidad disponible al comenzar la tormenta (T) y la cantidad sustraída durante la misma (qT_R); de lo contrario el desborde sería cero. La variable T a su vez depende de la cantidad de almacenaje disponible al finalizar el evento anterior y la cantidad de escorrentía sustraída del sistema durante el tiempo entre tormentas. Esta variable puede expresarse de la siguiente forma:

$$T = \min[Z + a t_e, b] \quad (3)$$

donde Z es la capacidad de almacenaje disponible al finalizar la tormenta anterior (mm); a es la tasa de sustracción (mm/hr) de la escorrentía acumulada durante el tiempo entre tormentas t_e ; b es la capacidad de almacenaje de diseño de la unidad de retención (mm).

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

La ecuación (3) expresa que la capacidad de almacenaje disponible al iniciar la tormenta actual (T) equivale al total de la capacidad sobrante al finalizar la tormenta anterior (Z) y el volumen sustraído durante el tiempo entre eventos de lluvia (at_e), siempre que dicho total sea menor que la capacidad de diseño disponible, de lo contrario el espacio de almacenaje disponible no podría ser mayor que la capacidad física del sistema (b).

El modelo descrito por las ecuaciones (2) y (3) es en gran medida similar a la formulación general de los estudios referenciados anteriormente. La estructura Markoviana del modelo surge de la variable Z , la cual condiciona el estado del proceso. En vista de la complejidad de lidiar con el proceso de transición de estado en la formulación de un proceso Markov para el modelo que se pretende desarrollar, usualmente se ha presumido una naturaleza determinística para la variable Z , representando ésta como $Z = \delta b$, donde δ representa una fracción de la capacidad total del sistema.

En el presente estudio se describe el estado del sistema al finalizar el evento anterior (Z) como una variable aleatoria con cierta distribución de densidad de probabilidad independiente. Aunque dicha formulación no pueda describirse como una estrictamente Markoviana, no obstante ésta posiblemente sería una más realista al considerar los factores operacionales que afectan el estado del sistema. La incertidumbre de ciertas variables operacionales tales como la sedimentación y el nivel de mantenimiento influyen sobre el estado del sistema de una manera que no permite caracterizar esta variable con una estructura específica tipo Markov.

Se propone una distribución exponencial trunca para la variable Z , acotada por los límites físicos de la capacidad de almacenaje que ésta representa. La consideración de una distribución exponencial no surge de ninguna observación experimental del proceso sino más bien de conveniencia analítica y el hecho de que, dado que las variables hidrológicas pueden describirse mediante distribuciones exponenciales, no podría descartarse la observación que una función de dichas variables pueda a su vez describirse por este tipo de distribución. La conveniencia analítica no es tan arbitraria como aparenta ser al considerar que la distribución propuesta para la variable Z puede reproducir, mediante la variación

de su parámetro, un sinnúmero de formas de distribución, incluyendo la uniforme, lo cual añade gran flexibilidad al modelo. A tales efectos, se propone la siguiente distribución para la variable Z , la cantidad de almacenaje disponible al finalizar el evento previo al evento de diseño:

$$f_z(z) = C_\theta e^{-\theta z} \quad 0 \leq z \leq b; -\infty \leq \theta \leq \infty \quad (4)$$

y a su vez

$$C_\theta = \frac{\theta}{1 - e^{-\theta b}} \quad (5)$$

donde $f_z(z)$ es la función de densidad de probabilidad; θ es el parámetro de forma de la distribución (mm^{-1}) y b es la capacidad de diseño de almacenaje del sistema retenedor (mm).

El parámetro θ , especificado por el usuario, determina la forma particular que asumirá la distribución de Z , permitiendo a su vez la consideración de situaciones de frontera tales como aquellas en la que sea más probable que el almacenaje este inicialmente lleno o inicialmente vacío. La diferencia fundamental con los otros modelos, en este aspecto, es que se prescinde del requerimiento de asignar un valor determinístico a Z para obtener soluciones analíticas.

La naturaleza del parámetro θ puede apreciarse si se normaliza la esperanza de Z con la capacidad de diseño del sistema. La esperanza normalizada de Z se presenta de la siguiente forma:

$$\frac{E[z]}{b} = \frac{1}{\theta b} - \frac{e^{-\theta b}}{1 - e^{-\theta b}} \quad (6)$$

La magnitud asignada al parámetro θ permite determinar el estado promedio del almacenaje en relación a su capacidad nominal. Se puede demostrar que:

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \left\{ \frac{E[z]}{b} \right\} = 1 \quad (7)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \left\{ \frac{E[z]}{b} \right\} = 0 \quad (8)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Se aprecia de las expresiones de los límites que el parámetro θ determinaría el valor más probable del estado del almacenaje Z , con una alta probabilidad de que, en promedio, el sistema esté vacío para valores negativos grandes de θ , o de lo contrario, que se encuentre lleno para valores positivos grandes de dicho parámetro. Una magnitud pequeña del parámetro, aproximándose a cero, favorecería la condición de que usualmente el sistema se encuentre a la mitad de su capacidad. Sin utilizar una estructura determinística para la variable Z , el parámetro θ permite considerar la variabilidad de la variable de estado del sistema. Este parámetro también permite reproducir numerosas formas de la distribución de la variable Z , incluyendo la distribución uniforme, la cual se obtiene para $\theta \rightarrow 0$.

DERIVACIÓN DEL MODELO PROBABILÍSTICO

El modelo para eficiencia en la captura de escorrentía se deriva mediante la aplicación sucesiva del procedimiento de las distribuciones derivadas de funciones de variables aleatorias, como formulado por *Benjamin and Cornell (1970)*. Las variables hidrológicas fundamentales del proceso consisten de la precipitación de la tormenta en la etapa n (P), la duración de dicha tormenta (t_R), el tiempo entre las tormentas $n-1$ y n (t_e) y la capacidad de almacenaje disponible en el sistema al finalizar la tormenta $n-1$ (Z).

Se presume que las variables P , t_R y t_e son independientes e idénticamente distribuidas, en este caso exponencialmente. El uso de dicha estructura se justifica con los resultados de varias investigaciones, las cuales sugieren que los procesos indicados pueden representarse de la manera propuesta (Pagán, 1984; Loganathan and Delleur, 1984; Delleur, 1983; Eagleson, 1978; Chow and Yen, 1976). En el caso del tiempo entre tormentas, la distribución exponencial está estipulada por la naturaleza del proceso de Poisson. Adicionalmente y tal como se ha discutido anteriormente, se presume que la variable Z es también independiente y exponencial. Se argumenta a favor de la independencia de esta variable mediante la observación de que el estado de almacenaje del sistema es afectado por

procesos y actividades tales como la sedimentación y la calidad del mantenimiento provisto a las instalaciones, los cuales introducen componentes que no están funcionalmente relacionados al proceso hidrológico.

La derivación del modelo por el método de las distribuciones derivadas procede en etapas, agrupando las variables independientes funcionalmente en otras variables y hallando sus distribuciones hasta obtener finalmente la distribución de la variable del volumen de desborde Y .

Distribución de la variable T

La variable T , definida por la ecuación (3), se refiere a la capacidad de almacenaje disponible en el sistema al ocurrir la tormenta n , y consiste del almacenaje disponible al finalizar el evento anterior más la capacidad adicional producida por la sustracción del agua acumulada durante el periodo de tiempo entre tormentas sucesivas. A su vez, T es función de las variables Z y t_e , en adición a los parámetros a y b .

Primeramente conviene obtener la distribución del término at_e definiendo una variable nueva como $V = at_e$, la cual define el volumen de agua sustraído durante el tiempo entre tormentas. El tiempo entre tormentas sucesivas se describe por una distribución exponencial con parámetro γ . La distribución de V entonces estaría dada por.

$$f_V(v) = \frac{\gamma}{a} e^{-\frac{\gamma}{a}v} \quad 0 \leq v \leq \infty \quad (10)$$

donde: γ = parámetro de la distribución, definido por el inverso del promedio poblacional del tiempo entre tormentas (hr^{-1}).

Prosigue combinar las variables independientes de la ecuación (3) en un solo término, con el propósito de simplificar la relación. Para estos fines se define la siguiente variable:

$$W = Z + V \quad (11)$$

donde: W es la capacidad de almacenaje total que se produce durante el tiempo entre tormentas y el cual estaría disponible al arribo de la tormenta n (mm).

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

La variable W se obtiene mediante el procedimiento de las distribuciones derivadas. Una forma práctica de obtener dichas distribuciones consiste de derivar primeramente la distribución de densidad acumulativa y luego obtener la densidad de probabilidad mediante la derivación de la acumulativa. Dicho procedimiento se ha utilizado en el presente estudio.

Debido a que la variable Z es de naturaleza finita, se impone cierta división en el dominio de W , de manera que la distribución de esta variable se formula en el rango $W \leq b$ y $W > b$. La distribución acumulativa se expresa como $F_W(w) = P[W \leq w]$, la cual a su vez, mediante la relación (11), puede expresarse como $P[W \leq w] = P[Z + V \leq w]$. Para $W \leq b$ se obtiene la siguiente expresión.

$$F_W(w) = \int_{z=0}^w \int_{v=0}^{w-z} f_Z(z) f_V(v) dv dz \quad 0 \leq w \leq b \quad (12)$$

Sustituyendo las distribuciones apropiadas e integrando, se obtiene la densidad acumulativa de W :

$$F_W(w) = \frac{C_\theta}{\theta} - \frac{aC_\theta}{\theta a - \gamma} e^{-\frac{\gamma}{a}w} + \frac{C_\theta \gamma}{\theta(\theta a - \gamma)} e^{-\theta w} \quad 0 \leq w \leq b \quad (13)$$

La distribución acumulativa para el otro rango del dominio, $W > b$, se obtiene de una expresión similar a la (12), pero ahora sustituyendo $w = b$ en el integral de la variable Z . Esta operación obtiene:

$$F_W(w) = 1 - \frac{aC_\theta}{\theta a - \gamma} \left[e^{-\frac{\gamma}{a}w} - e^{-\theta b - \frac{\gamma}{a}w} \right] \quad w > b \quad (14)$$

La distribución de densidad de probabilidad de W se obtiene mediante la derivada de $F_W(w)$, resultando en las siguientes expresiones:

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{\gamma C_\theta}{\theta a - \gamma} \left(e^{-\frac{\gamma}{a}w} - e^{-\theta w} \right) & 0 \leq w \leq b \\ \frac{\gamma C_\theta}{\theta a - \gamma} \left(e^{-\frac{\gamma}{a}w} - e^{-\theta b - \frac{\gamma}{a}(w-b)} \right) & w > b \end{cases} \quad (15)$$

Obtenida la distribución de W , la relación entre T y W se reduce a $T = \min[W, b]$. Esta relación significa que la variable T será de naturaleza mixta, consistiendo de una parte continua y otra discreta en términos de una probabilidad de masa. La parte continua se obtiene cuando $W < b$, o sea, que el espacio que se haga disponible durante el tiempo entre tormentas no exceda la capacidad de almacenaje de diseño del sistema. En dicha región $T = W$. De lo contrario, T no podría exceder esta capacidad. Entonces, la parte discreta de la distribución de T está definida por $P[T = b] = P[W \geq b]$. Finalmente, la densidad de probabilidad de la variable T se expresa como:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{\gamma C_\theta}{\theta a - \gamma} \left(e^{-\frac{\gamma}{a}t} - e^{-\theta t} \right) & 0 \leq t \leq b \\ \frac{\gamma C_\theta}{\theta a - \gamma} \left(e^{-\frac{\gamma}{a}b} - e^{-\theta b} \right) & t = b \end{cases} \quad (16)$$

Se aprecia que la distribución de T es función del tiempo entre eventos y de la tasa de sustracción. El parámetro θ modifica la distribución dependiendo de qué estado del sistema de almacenaje ésta favorezca de acuerdo a su magnitud.

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

La distribución del desborde (Y) se obtiene de la ecuación (2), también mediante la aplicación sucesiva del método de las distribuciones derivadas. Para realizar esta tarea, primero se agrupan las variables relacionadas al almacenaje de la ecuación (2) de la siguiente forma:

$$Y = \max[R - U, 0] \quad (17)$$

donde se introduce la variable $U = T + qt_R$

La variable U define la capacidad de total de almacenaje que se hace disponible durante la duración de la tormenta presente (t_R), consistiendo de la capacidad disponible al comenzar el evento y aquella adicional que se produce mediante la sustracción de agua (q).

Se ha postulado una distribución exponencial para la duración de la tormenta, caracterizada por el parámetro β , en este caso. A su vez, se puede definir una variable $D = qt_R$, y así definir la variable U como $U = T + D$. Siendo D una sencilla función lineal de la duración de la tormenta, la distribución de esta variable se puede representar como:

$$f_D(d) = \frac{\beta}{a} e^{-\frac{\beta}{a}d} \quad d \geq 0 \quad (18)$$

La derivación de la distribución de U se complica por el hecho de que T es una variable mixta. La derivación se desarrolla utilizando la relación $P[U \leq u] = P[T + D \leq u]$ y definiendo las regiones apropiadas para la integración de las distribuciones marginales de las variables T y D . Considerando el dominio de T , se definen las regiones $U \leq b$ y $U > b$

para la distribución de esta variable. Para la primera de estas regiones ($U \leq b$), la cumulativa de U se obtiene de la relación

$$F_U(u) = \int_{t=0}^u \int_{d=0}^{u-t} f_T(t) f_D(d) dd dt \quad 0 \leq u \leq b \quad (19)$$

Utilizando las distribuciones apropiadas, se obtiene la siguiente expresión para la distribución cumulativa en el dominio indicado para $0 \leq u \leq b$:

$$F_u(u) = \frac{C_\theta}{\theta} + \frac{a^2 \beta C_\theta}{(\theta a - \gamma)(\gamma q - \beta a)} e^{-\frac{\gamma}{a}u} - \frac{\beta \gamma C_\theta}{\theta(\theta a - \gamma)(\theta q - \beta)} e^{-\theta u} - \frac{\gamma q^2 C_\theta}{(\gamma q - \beta a)(\theta q - \beta)} e^{-\frac{\beta}{q}u} \quad (20)$$

En la derivación de la otra parte del dominio ($U > b$), se utiliza la siguiente expresión:

$$F_U(u) = \int_{t=0}^u \int_{d=0}^{u-t} f_T(t) f_D(d) dd dt + P[T = b]P[D \leq u - b] \quad u > b \quad (21)$$

Utilizando las distribuciones indicadas, se obtiene la integración en la parte del dominio correspondiente a $U > b$:

$$F_u(u) = 1 - \frac{\gamma q^2 C_\theta}{(\gamma q - \beta a)(\theta q - \beta)} e^{-\frac{\beta}{q}u} + \frac{a^2 \beta C_\theta}{(\theta a - \gamma)(\theta q - \beta)} e^{-\frac{\gamma}{a}u - \frac{\beta}{q}(u-b)} - \frac{C_\theta(\gamma q - a\theta q + a\beta)}{(\theta a - \gamma)(\theta q - \beta)} e^{-\theta b - \frac{\beta}{q}(u-b)} \quad (22)$$

para $u > b$

La derivada de la distribución cumulativa permite obtener la densidad de probabilidad de la variable U . Esta operación obtiene la siguiente distribución, en la cual se han agrupado los coeficientes para simplificar las expresiones:

$$f_U(u) = \begin{cases} -K_2 e^{-\frac{\gamma}{a}u} + K_3 e^{-\theta u} + K_4 e^{-\frac{\beta}{q}u}; & 0 \leq u \leq b \\ K_1 e^{-\frac{\beta}{q}u}; & u \geq b \end{cases} \quad (23)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Las constantes de la distribución (23) agrupan combinaciones de parámetros del modelo y se definen de la siguiente forma:

$$K_2 = \frac{a \beta \gamma C_\theta}{(\theta a - \gamma)(\gamma q - \beta a)} \quad (24)$$

$$K_3 = \frac{\beta \gamma C_\theta}{(\theta a - \gamma)(\theta q - \beta)} \quad (25)$$

$$K_4 = \frac{a \beta \gamma C_\theta}{(\gamma q - \beta a)(\theta q - \beta)} \quad (26)$$

$$K_1 = K_4 - \frac{a \beta}{\gamma q} K_2 e^{-\left(\frac{\gamma}{a} - \frac{\beta}{q}\right)b} + \frac{\gamma q + a\theta q + a\beta}{\gamma q} K_3 e^{-\left(\theta - \frac{\beta}{q}\right)b} \quad (27)$$

Las constantes de las ecuaciones (24) a (27) combinan los parámetros del proceso hidrológico y las variables de diseño del sistema. Con la distribución de U , solamente restaría derivar la distribución del término $R - U$. La variable R representa la acumulación de escorrentía que produce la tormenta. Aunque sería necesario obtener las estadísticas de la escorrentía para definir esta variable, esto sería muy difícil en la práctica, particularmente para las áreas urbanas. Debido a que las estadísticas de la lluvia son más accesibles, es más conveniente expresar R en términos de una transformación sencilla de la precipitación, similar en naturaleza al Método Racional. A tales fines, se presume que la escorrentía puede expresarse como $R = CP$, donde C describe cierto coeficiente de escorrentía y P representa la variable de la acumulación de precipitación de la tormenta, la cual se ha presumido sigue una distribución exponencial con parámetro α . Dicha

representación es más apropiada para áreas urbanizadas pequeñas. En localizaciones donde existan estadísticas de escorrentía, éstas pueden representarse en el modelo utilizando $C = 1$ y dejando que el parámetro de la precipitación represente dicho proceso.

En base a la variable exponencial de precipitación, la densidad de probabilidad de la escorrentía se deriva como

$$F_R(r) = \frac{\alpha}{C} e^{-\frac{\alpha}{C}r} ; \quad r \geq 0 \quad (28)$$

donde α es el parámetro de la distribución, definido por el inverso del promedio poblacional de la acumulación de precipitación para cada tormenta (mm^{-1}).

Es conveniente transformar aun más la expresión (17) para resaltar la relación entre el desborde de escorrentía y la capacidad de almacenaje del sistema de retención. Para lograr esto se define la nueva variable $S = R - U$, donde S sería el negativo del espacio de almacenaje disponible al finalizar la tormenta. Valores negativos de S representan la situación donde la escorrentía no alcanza a llenar el almacenaje y por consiguiente no habría desborde. Por esta razón la variable de desborde puede expresarse como:

$$Y = \max[S, 0] \quad (29)$$

Como indica la expresión (29), valores negativos de S no producirían desborde, mientras que valores positivos de S definen la magnitud del desborde de escorrentía. La variable S podría también representar la capacidad de almacenaje disponible si ésta se representa como $S = U - R$, entonces el desborde se definiría como $Y = -R$. Esta última definición no es útil en nuestro caso y, por consiguiente, se utiliza la definición original.

La derivación de la distribución de densidad de la variable S es compleja debido a la interacción de los dominios de las variables R y U . Afortunadamente, no es necesario definir dicha distribución en todo su dominio por la razón que el desborde Y solamente excederá cero para valores positivos de S . Es necesario definir la distribución sólo para valores positivos del desborde. La razón de esta simplificación obedece al hecho de que se pretende finalmente obtener la esperanza de Y , la cual debido a la naturaleza mixta de la variable pesaría el valor $Y = 0$ con la probabilidad de que $S \leq 0$. La expresión de la esperanza de Y tendría la siguiente forma:

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Aunque solamente haría falta definir la densidad de S en la región mayor de cero, aun así se derivó la distribución completa para verificar la correspondencia en los límites del dominio de la variable. Para el propósito del estudio solamente se presentará la parte correspondiente al dominio positivo de la distribución. Utilizando la formulación de las distribuciones derivadas, la distribución cumulativa del rango positivo de la variable S se obtiene de la siguiente expresión:

$$F_{S(s>0)}(s) = \int_{u=0}^b \int_{r=0}^{u+s} f_{U(u \leq b)}(u) f_R(r) dr du + \int_{u=b}^{\infty} \int_{r=0}^{u+s} f_{U(u > b)}(u) f_R(r) dr du ; \quad s > 0 \quad (31)$$

Insertando las distribuciones apropiadas para las variables U y R en el integral anterior, se obtiene la siguiente expresión para la distribución cumulativa del rango positivo de S :

$$F_{S(s>0)}(s) = 1 - K_s e^{-\frac{\alpha}{C}s} ; \quad s > 0 \quad (32)$$

donde

$$K_s = -\frac{aCK_2}{\alpha a + \gamma C} \left[1 - e^{-\left(\frac{\alpha + \gamma}{C} \right)b} \right] + \frac{CK_3}{\alpha + \theta C} \left[1 - e^{-\left(\frac{\alpha + \theta}{C} \right)b} \right] + \frac{qCK_4}{\alpha q + \beta C} \left[1 - e^{-\left(\frac{\alpha + \beta}{C} \right)b} \right] + \frac{qCK_1}{\alpha q + \beta C} e^{-\left(\frac{\alpha + \beta}{C} \right)b} \quad (33)$$

El término K_5 incluye los parámetros del proceso hidrológico y las variables de diseño del sistema de retención de escorrentía. Los términos K_1 , K_2 , K_3 y K_4 han sido definidos en las expresiones (24) a (27).

La densidad de probabilidad de la variable S se obtiene derivando la expresión de la distribución acumulativa (32):

$$f_{S(s>0)}(s) = \frac{\alpha}{C} K_s e^{-\frac{\alpha}{C}s} ; \quad s > 0 \quad (34)$$

Debido a que el desborde Y es equivalente a S en el dominio de la distribución de esta variable, la distribución del desborde se obtiene directamente de la relación $f_Y(y) = f_{S(s>0)}(y)$. Cabe notar que la distribución de Y es de naturaleza mixta, con una probabilidad de masa en $P[Y = 0]$. La expresión para esta probabilidad no nos concierne debido a que en la determinación de la esperanza de Y , ésta estaría multiplicada por $Y = 0$, como se define en la expresión (30).

Finalmente, se evalúa la expresión (30) haciendo uso de la distribución en la expresión (34). Realizando esta operación, se obtiene:

$$E[Y] = \frac{C}{\alpha} K_s \quad (35)$$

La esperanza de Y se combina con la esperanza de la cantidad de escorrentía para definir la eficiencia operacional del sistema mediante la expresión (1). La esperanza de la acumulación de escorrentía se obtiene con la distribución (28):

$$E[R] = \frac{C}{\alpha_s} \quad (36)$$

La esperanza de R indica que la escorrentía es función del coeficiente que transforma la precipitación en escorrentía. Si existen las estadísticas del proceso de escorrentía, obviando la necesidad de transformar las de la lluvia, entonces un coeficiente $C = 1$ permitiría utilizar los datos de la escorrentía para definir el parámetro α en base a este proceso.

Utilizando las expresiones (35) y (36), la eficiencia en la captura de escorrentía definida en la expresión (1) se obtiene como

$$\rho = 1 - K_s \quad (37)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

donde K_s está definida por la expresión (33). La naturaleza de ρ se relaciona directamente con el concepto del riesgo hidrológico, el cual para nuestros fines se define como $P[Y > 0]$, o sea, la probabilidad de que ocurra el desbordamiento del sistema de almacenaje durante cierta tormenta, la cual está relacionada a los parámetros del proceso y las especificaciones de diseño del sistema, ya sea de su capacidad y la tasa de extracción de agua que se utilice en éste. Utilizando la distribución obtenida para el desborde, el riesgo estaría definido como

$$P[Y > 0] = 1 - F_{Y(Y>0)}(0) \quad (38)$$

La evaluación de la expresión (38) obtiene

$$P[Y > 0] = K_s \quad (39)$$

Se aprecia que la eficiencia operacional del sistema, definida por la expresión (37), se relaciona directamente con el riesgo de desborde del sistema de almacenaje. La eficiencia operacional a largo plazo del sistema corresponde al riesgo de desborde. Un resultado similar había sido obtenido por Loganathan et al. (1985). La evaluación de este riesgo es completamente analítica y sólo requiere la solución de la expresión (33). Dicha formulación es amena para utilizarse en modelos de planificación y optimización ya que provee una relación tecnológica que puede resolverse prontamente.

A continuación se discute la validación del modelo y varias aplicaciones.

VALIDACIÓN DEL MODELO

La validación del modelo estadístico con datos reales requiere un historial extenso de mediciones de campo en facilidades existentes. Lamentablemente, una vez construidos, el monitoreo de dichos sistemas es limitado y fragmentado. Es por esta razón que el diseño de un sistema de almacenaje frecuentemente se realiza mediante la simulación numérica con una serie histórica de lluvia. La serie de lluvia puede consistir de datos horarios dentro de un periodo de un año o más. Los modelos “*Storm Water Management Model*” (SWMM) y “*Storm Water Runoff Model*” (STORM) han sido utilizados extensamente para simulaciones detalladas de sistemas de manejo de escorrentía. Los resultados de dichas simulaciones permiten obtener los parámetros del funcionamiento del sistema y a la vez analizar su eficiencia operacional para varias alternativas de diseño. Estudios representativos de este enfoque han sido realizados por la Environmental Protection Agency (1986), Goforth et al. (1983), Nix (1982) y Heany et al. (1979). El modelo probabilístico puede validarse mediante la comparación con los resultados de este tipo de estudio.

Un caso especial del modelo general puede validarse con los resultados de los estudios de Nix (1982) y Goforth et al. (1983). El estudio de Nix se realizó con el modelo SWMM, con datos de precipitación de la ciudad de Minneapolis, en el estado de Minnesota, mientras que aquel de Goforth et al. utilizó el modelo STORM, basándose en datos climatológicos de la ciudad de Atlanta, en el estado de Georgia.

Aplicación a Minneapolis

La aplicación del modelo probabilístico a los resultados de la simulación detallada de un sistema de retención de escorrentía pluvial en Minneapolis (Nix, 1982) requiere ciertas simplificaciones para atemperar el modelo a la conceptualización del sistema utilizado en la simulación. El sistema utilizado en la simulación consistió de un área urbana contribuyente a una unidad de retención de la cual se sustrahía agua a una tasa constante mediante el bombeo. El sistema se simuló con la lluvia horaria de un año representativo. Se utilizó un modelo lineal sencillo para la transformación de lluvia en escorrentía. El análisis de la serie resultante de eventos permitió extraer las estadísticas del proceso, las cuales se utilizan para definir los parámetros del modelo probabilístico. El análisis del ciclo de vaciado y llenado del almacenaje sirvió para determinar el parámetro operacional de la eficiencia de captura de escorrentía para numerosas combinaciones de las variables de diseño del sistema.

La conceptualización del sistema utilizado en la simulación de Minneapolis puede representarse en el modelo probabilístico presumiendo una sustracción uniforme de agua del almacenaje en todo tiempo. En el modelo probabilístico, esta sustracción uniforme puede expresarse como $q = a$, o sea, que se extrae agua a una tasa constante (a) durante todo el tiempo. También, considerando el hecho de que las estadísticas del mismo proceso de escorrentía están disponibles, es innecesario recurrir a la transformación de lluvia en escorrentía descrita por el parámetro C , el cual puede disponerse como $C = 1$ en el modelo. Los términos del modelo probabilístico, las expresiones (24) a (27), y luego (33), se simplifican a los siguientes:

$$K_1 = K_2 - \frac{\beta}{\gamma} K_2 e^{-(\gamma-\beta)\frac{b}{a}} + \frac{\gamma + \theta a + \beta}{\gamma} K_3 e^{-\left(\theta - \frac{\beta}{a}\right)b} \quad (40)$$

$$K_2 = \frac{\beta \gamma C_\theta}{(\theta a - \gamma)(\gamma - \beta)} \quad (41)$$

$$K_3 = \frac{\beta \gamma C_\theta}{(\theta a - \beta)(\theta q - \gamma)} \quad (42)$$

$$K_4 = K_2 \quad (43)$$

$$K_5 = -\frac{aK_2}{\alpha a + \gamma} \left[1 - e^{-\left(\frac{\gamma + \alpha}{a}\right)b} \right] + \frac{K_3}{\theta + \alpha} \left[1 - e^{-(\theta + \alpha)b} \right] + \frac{aK_2}{\alpha a + \beta} \left[1 - e^{-\left(\frac{\beta + \alpha}{a}\right)b} \right] + \frac{aK_1}{\alpha a + \beta} e^{-\left(\frac{\beta + \alpha}{a}\right)b} \quad (44)$$

Las expresiones (40) a (44) comparan con aquellas obtenidas por Segarra and Loganathan (1992), aunque la formulación de los autores se basó en la presunción de un nivel de almacenaje conocido disponible en la unidad al finalizar la tormenta en la etapa $n-1$. En el modelo propuesto, dicho estado es variable y la posibilidad de cierto nivel está determinada por el parámetro θ . Aun así, los resultados obtenidos en las formulaciones anteriores, para sistemas presumiblemente vacíos o llenos en la etapa $n-1$, pueden aproximarse considerando los límites establecidos en las

expresiones (7) y (9), reflejando una alta probabilidad de que la unidad haya finalizado llena o vacía para el evento anterior.

En los resultados de la simulación detallada presentada por Nix (1982) se presentan los resultados en forma de las denominadas isocuantas (*isoquants*), un término aplicado a las gráficas de la relación entre la capacidad de almacenaje y la tasa de sustracción de agua que produzcan un nivel específico de eficiencia de captura de escurrentía. De esta forma, es posible estimar cuál sería la eficiencia operacional de cualquier combinación de las variables de diseño de un sistema de retención.

Aunque se desconozca el estado inicial del sistema de almacenaje, por éste ser una variable dinámica del proceso, el parámetro θ permite construir las isocuantas que enmarcan las posibles representaciones del sistema basado en los límites establecidos en las expresiones (7) y (9) ya que éstas representan los límites operacionales del mismo.

El sistema simulado en Minneapolis consistió de un área de captación sencilla, de unos 2.6 km². El área drena directamente hacia la unidad de retención de escurrentía. Se simuló el sistema mediante una transformación lineal entre la lluvia horaria y la escurrentía, con tormentas de cierto año cuyas estadísticas de muestra eran comparables a las de la serie total registrada. El análisis de los resultados de la escurrentía produjeron las estadísticas que se ilustran en la siguiente tabla:

Tabla 1: Estadísticas de la escurrentía de Minneapolis^a.

Variable	Magnitud	C.V. ^b
Promedio de acumulación de escurrentía, $E[R]$	2.24 mm	1.40
Promedio de duración de las tormentas, $E[t_R]$	7.3 hr	1.10
Promedio de tiempo entre tormentas, $E[t_e]$	90.9 hr	0.96

a-adaptadas de Nix (1982); b- coeficiente de variación

Las variables cuyas estadísticas se presentan en la Tabla 1 son representadas en el modelo probabilístico por las variable R , t_R y t_e , respectivamente. Los parámetros asociados a estas variables corresponden a $\alpha = 0.446 \text{ mm}^{-1}$, $\beta = 0.137 \text{ hr}^{-1}$ y $\gamma = 0.011 \text{ hr}^{-1}$, respectivamente. La magnitud de estos parámetros se obtiene del inverso de las magnitudes presentadas en la Tabla 1. El coeficiente de variación permite evaluar cuán apropiado sería describir la variable hidrológica por una distribución exponencial ($C.V. = 1$). En el caso de la acumulación de escurrentía, el coeficiente presentado indica que esta variable podría tal vez no representarse adecuadamente por una exponencial, con la salvedad de que se trata de una muestra y no de la población de dicha variable. En el caso de los tiempos, la presunción de exponencial es más adecuada.

La aplicación del modelo consiste de la solución de las expresiones (37) y (44), incluyendo las constantes incluidas en esta última. Considerando que las expresiones son analíticas, es posible aplicar cierto algoritmo matemático para resolverlas explícitamente. En este caso se utilizó una hoja de cálculo electrónica, universalmente disponible, para resolver las ecuaciones mediante un algoritmo sencillo en el cual inicialmente se fijaba el valor de la variable de la tasa de sustracción, para luego obtener mediante iteración el valor correspondiente de la capacidad de retención para el nivel de eficiencia estipulado. De esta forma se generaron las isocuantas para compararlas con aquellas obtenidas de la simulación detallada.

Para enmarcar los posibles límites de las isocuantas y así reflejar las condiciones determinísticas utilizadas en estudios anteriores, solamente se generaron las correspondientes a las condiciones extremas, enmarcadas por los límites $\theta \rightarrow -\infty$ (para obtener $E[Z]/b \approx 1$) y $\theta \rightarrow \infty$ (para obtener $E[Z]/b \approx 0$). Los valores actuales empleados para estos límites de θ en la simulación corresponden a $\{-2000, 5000\}$. Los resultados, para varios niveles de eficiencia (ρ) se presentan en las Figuras 2 a 3, comparados con los resultados del estudio de Minneapolis.

Para facilitar la presentación de los resultados del modelo, las magnitudes de las variables de diseño a y b han sido normalizadas para lograr una representación no-dimensional de las isocuantas. La variable de la tasa de sustracción a ha sido normalizada por la razón $Qo = E[R]/E[t_e]$, la cual es equivalente a γ/α , en términos de los parámetros del modelo. A su vez, la variable de la capacidad de almacenaje b ha sido normalizada por el promedio de la escurrentía, $E[R]$.

Los resultados presentados en las Figuras 2 y 3 son similares a aquellos obtenidos por Segarra and El Basha (1992), demostrando que el modelo probabilístico refleja adecuadamente los extremos de estado del sistema. Los resultados del modelo comparan favorablemente con aquellos de la simulación detallada en el sentido que enmarcan, en gran medida,

el rango de posibilidades de las variables de diseño para cierta eficiencia. Para más detalles sobre la comparación de los resultados, se refiere al lector a la literatura anteriormente citada.

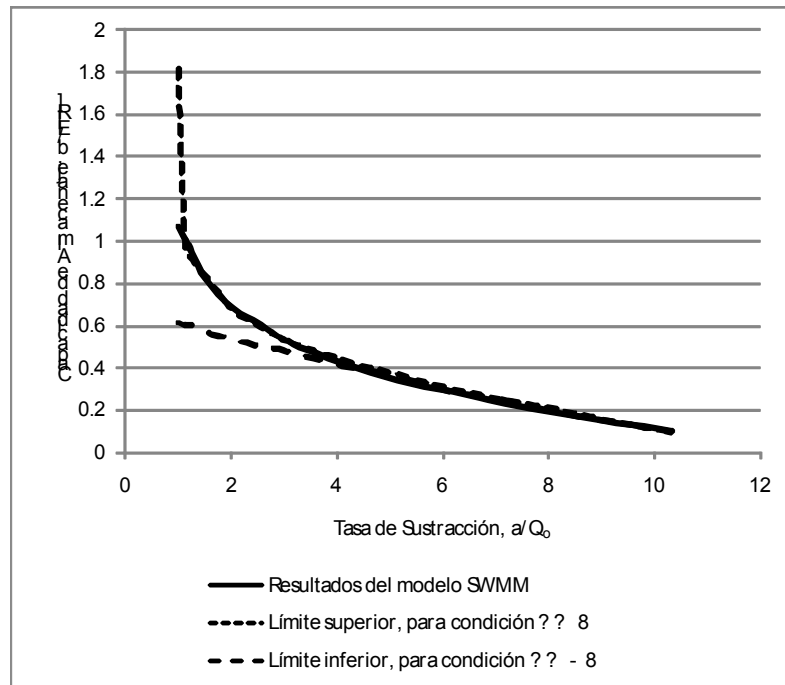


Figura 2: Comparación del modelo probabilístico con resultados de simulación para Minneapolis, con eficiencia $\rho = 50\%$.

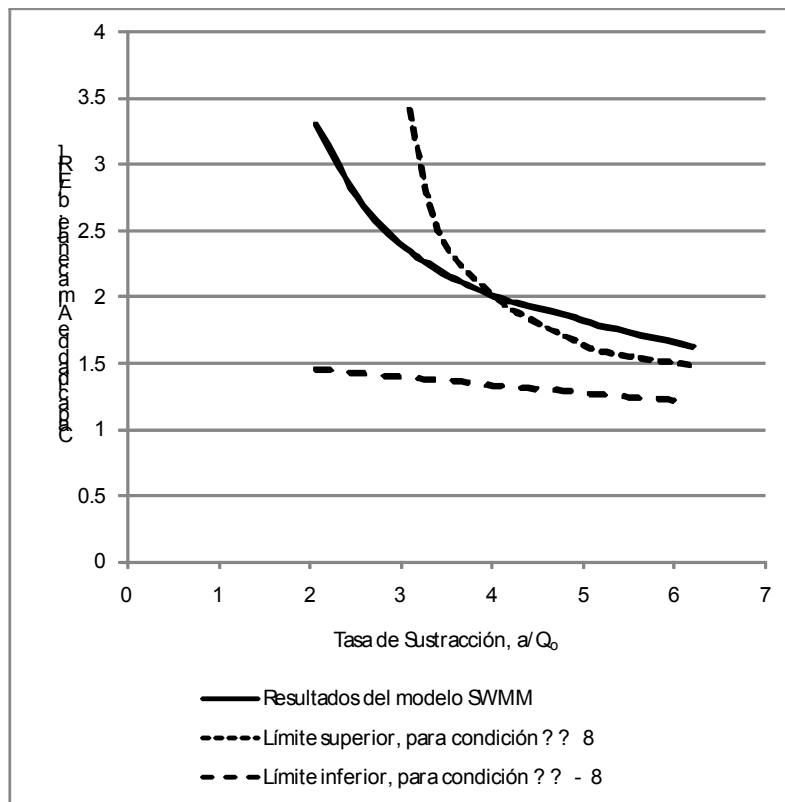


Figura 3: Comparación del modelo probabilístico con resultados de simulación para Minneapolis, con eficiencia $\rho = 80\%$.

Vale indicar que las isocuantas convergen para valores altos de la tasa de sustracción debido a que en dicha región no haría diferencia el estado del sistema al finalizar la tormenta anterior. Para razones de sustracción más pequeñas existe una marcada diferenciación en las isocuantas del modelo probabilístico debido a que el estado del sistema al finalizar la tormenta previa ejerce una mayor influencia sobre el requerimiento de almacenaje del sistema. Valores intermedios de θ producirían isocuantas más cercanas a las curvas experimentales, las cuales reflejan toda la dinámica del proceso.

La región de las isocuantas diagonalmente más cercana al origen de los ejes de coordenadas es la de mayor interés práctico debido a que en esta región existirían los diseños de menor costo (Segarra and El Basha, 1996). Es precisamente en dicha región que se obtiene una mejor comparación del modelo probabilístico con la simulación, en términos de enmarcar las posibles soluciones del sistema.

Aplicación a Atlanta

El modelo probabilístico se compara con otra simulación similar a la de Minneapolis. En este caso para la ciudad de Atlanta, en el estado de Georgia. Dicha simulación fue realizada por Goforth et al. (1983), utilizando el modelo SWWM y aplicándolo a un área de captación de 0.1 km^2 . Para la simulación de un año de lluvia, se obtuvieron las estadísticas del proceso de escorrentía que se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2: Estadísticas de la escorrentía de Atlanta^a.

Variable	Magnitud	C.V. ^b
Promedio de acumulación de escorrentía, $E[R]$	5.66 mm	1.10
Promedio de duración de las tormentas, $E[t_R]$	6.89 hr	1.12
Promedio de tiempo entre tormentas, $E[t_e]$	124.3 hr	0.94

a-adaptadas de Goforth et al. (1983); b- coeficiente de variación

El mismo procedimiento utilizado en la ilustración de Minneapolis se aplica aquí. En este caso, el coeficiente de variación para la escorrentía es más cercano al de la exponencial que aquel de Minneapolis.

Para esta aplicación, se computan las isocuantas para un solo nivel de eficiencia, pero ahora variando el parámetro del estado inicial del sistema. Se añaden dos isocuantas intermedias, una definida por $\theta = 0.001$ (implicando una unidad con una distribución uniforme de estado inicial), y la otra para $\theta = 7.0$, la cual refleja un rango de estado inicial, definido por $E[Z]/b$, entre 0.22 y 0.33, implicando que la unidad de retención tendría, inicialmente, menos de una tercera parte de su capacidad disponible, en promedio. Al igual que la aplicación anterior, los resultados presentados por Goforth et al. (1983) también han sido normalizados para presentarlos en la Figura 4.

Se aprecia en la Figura 4 una excelente comparación con los resultados de la simulación. La correspondencia de la curva de simulación con aquella del modelo para $\theta = 7.0$ sugiere que el sistema estaría, la mayor parte del tiempo, con menos de la mitad de la capacidad de almacenaje disponible. Esto se debe a que la isocuanta para este valor del parámetro se ubica sobre aquella correspondiente a la mitad de la capacidad disponible ($\theta \rightarrow 0$). Estos resultados comparan con aquellos obtenidos por Loganathan et al. (1985), pero con la diferencia que el modelo probabilístico propuesto permite una mejor evaluación de las características operacionales del sistema, como ilustran las siguientes aplicaciones.

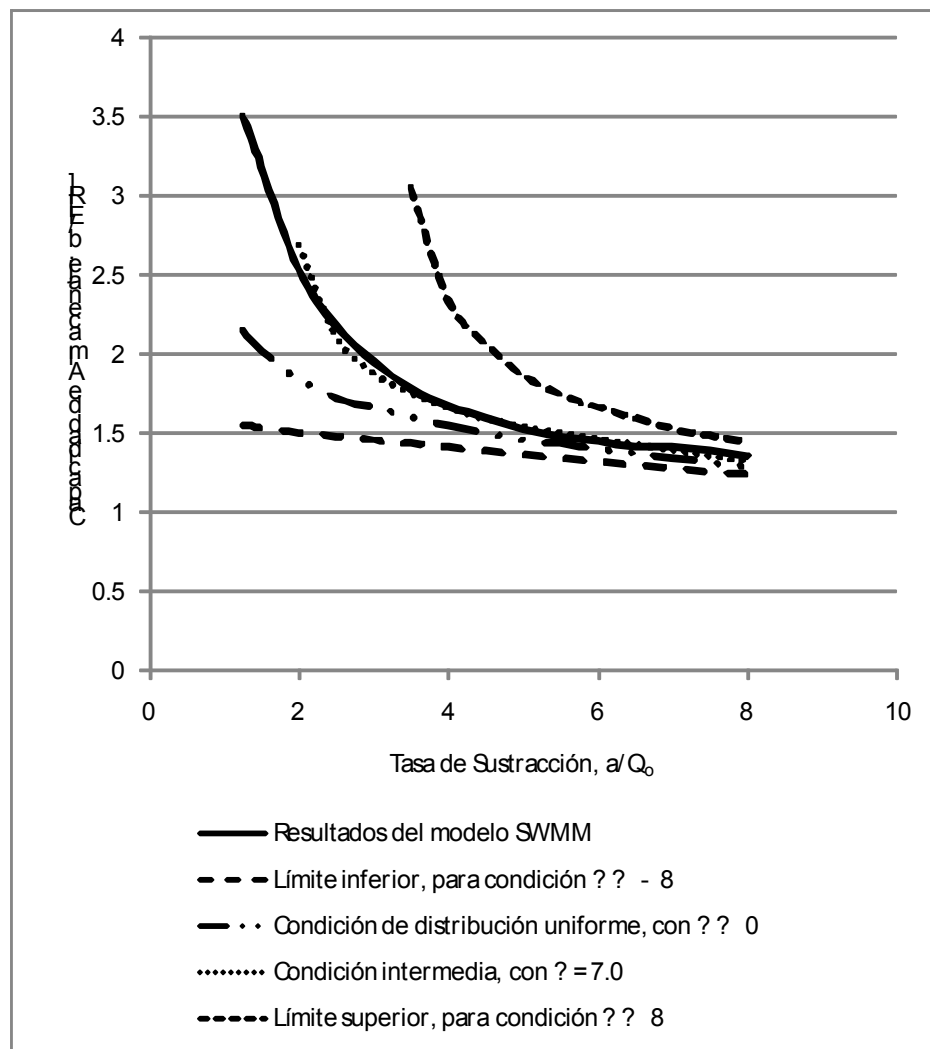


Figura 4: Comparación del modelo probabilístico con resultados de simulación para Atlanta, con eficiencia $\rho = 80\%$.

Evaluación de la confiabilidad de un sistema de retención

La utilidad práctica del modelo probabilístico reside en la capacidad de estimar la confiabilidad de alternativas de diseño de un sistema de manejo de escorrentía. El diseño del sistema consiste de la determinación de los valores de las variables de sustracción a y q , y la variable de la capacidad de almacenaje b . La confiabilidad del diseño se determina en términos del rango de la eficiencia en la captura de escorrentía que provee una combinación particular de sustracción y capacidad de almacenaje en un sistema de retención. El rango se evalúa considerando las condiciones extremas definidas por el parámetro θ y discutidas anteriormente.

Una forma práctica de representar el rango de confiabilidad de un diseño consiste en fijar la capacidad de almacenaje del sistema y luego evaluar la confiabilidad para distintos valores de la tasa de sustracción. Utilizando los parámetros y la configuración de la simulación de Atlanta discutida anteriormente, se evalúa la confiabilidad del sistema para un diseño con una capacidad de retención de 12.7 mm (0.5 pulg.). El procedimiento consiste en evaluar la eficiencia de captura de escorrentía variando la sustracción para las condiciones extremas de una unidad con alta probabilidad de estar inicialmente vacía ($\theta \rightarrow -\infty$) o inicialmente llena ($\theta \rightarrow \infty$). Los resultados de dicho análisis se presentan en la Figura 5.

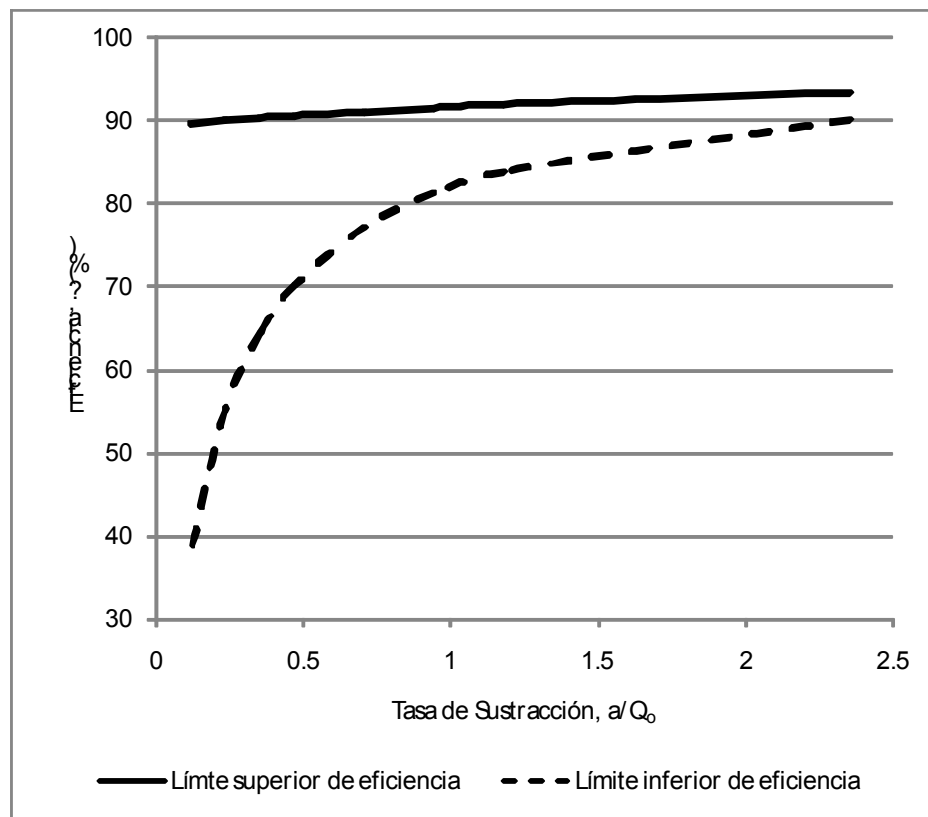


Figura 5: Confiabilidad del sistema de retención en Atlanta para capacidad de almacenaje $b = 12.7$ mm.

Los resultados de la Figura 5 ilustran la confiabilidad del sistema en base a los límites de eficiencia del diseño del sistema de retención. Para valores bajos de la tasa de sustracción, se observa una posible alta variabilidad en la eficiencia potencial del sistema, demostrando poca confiabilidad en el sentido que existe una posibilidad razonable, considerando la banda del límite inferior de eficiencia, de que ocurra un desbordamiento. Los límites de eficiencia convergen al incrementar la tasa de sustracción, proveyendo una mayor confiabilidad al diseño y por ende un menor nivel de riesgo.

Altos niveles de confiabilidad implicarían un mayor costo de las facilidades de sustracción. El diseñador escogería aquella combinación de tasa de sustracción y capacidad de almacenaje que provea una confiabilidad deseable, cuyo nivel no necesariamente reflejaría consideraciones de costo. Consideraciones de otro tipo, particularmente ambientales, no enteramente cuantificables en términos monetarios, podrían fijar el nivel de confiabilidad deseado para dichos sistemas.

APLICACIONES DEL MODELO GENERAL

Diseño con tasas de sustracción distintas

Las aplicaciones ilustradas han considerado un caso especial del modelo probabilístico. En esta sección se consideran aplicaciones del modelo general, descrito por las expresiones (33) y (37). Primeramente se discute una aplicación en la cual las razones de sustracción durante el tiempo entre tormentas y durante la duración de la tormenta actual son distintas ($a \neq q$). La tasa de sustracción a puede representar infiltración u otro proceso de remoción que aplique durante el tiempo entre tormentas, mientras que q puede representar bombeo o la descarga promedio controlada del sistema durante la tormenta. Se considera la situación en la cual se pretende determinar qué tasa de sustracción q sería recomendable ejercer durante el evento y cómo ésta afecta la capacidad del sistema para cierta eficiencia operacional. Aplicando el modelo, se puede establecer la relación entre la capacidad de almacenaje y la tasa de sustracción. Con el fin de ilustrar esta aplicación, para un área hipotética, se han definido los parámetros presentados en la Tabla 3:

Tabla 3: Parámetros para área hipotética.

Parámetro	Magnitud
C	0.9
ρ	70%
α	0.079 mm^{-1}
β	0.5 hr^{-1}
γ	0.017 hr^{-1}
a	0.13 mm/hr

Los datos de la tabla describen un área urbanizada para la cual se planifica un sistema de retención donde se pretende lograr un 70% de eficiencia en la intercepción de la escorrentía pluvial. En este sistema se proveerá una sustracción uniforme de 0.13 mm/hr (siempre que exista escorrentía acumulada), la cual podría incrementarse mediante bombeo durante la ocurrencia de las tormentas. El modelo representado por las expresiones (33) y (37) se resuelve fijando los valores de la capacidad b , la eficiencia ρ y luego resolviendo por la sustracción q . La solución obtenida se presenta en la Figura 6.

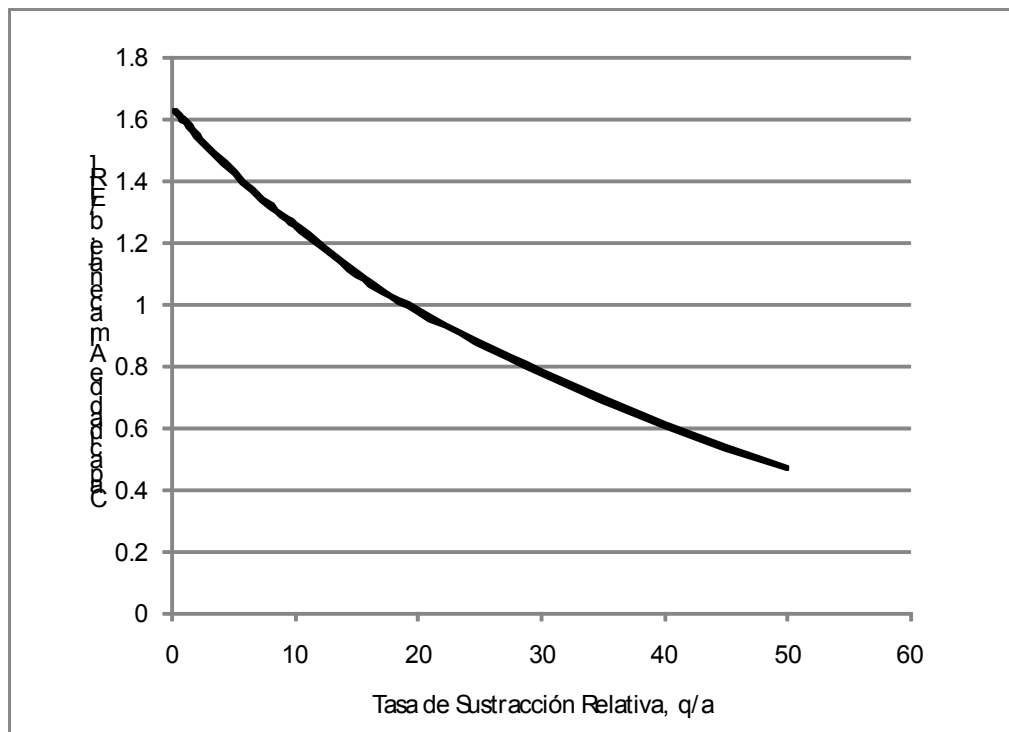


Figura 6: Variación de requerimiento de almacenaje con tasa de sustracción relativa, para eficiencia $\rho = 70\%$.

En la Figura 6, los resultados obtenidos para la sustracción q han sido normalizados por la sustracción durante el tiempo entre tormentas. De esta forma se representa la magnitud relativa de estas variables y como afectan la capacidad del sistema. Se aprecia la razón decreciente entre la tasa de sustracción y la capacidad de almacenaje requerida para mantener la eficiencia operacional estipulada. La generación de estas relaciones permitiría desarrollar alternativas para escoger la mejor combinación de sustracciones de acuerdo a las consideraciones de diseño del sistema bajo consideración. El siguiente ejemplo ilustra la utilización de resultados como los presentados en la Figura 6:

Se desea diseñar una charca de retención con una eficiencia estimada de 70% para manejar la escorrentía proveniente de un desarrollo de 0.02 km^2 . Debido a la posible sedimentación, se estima que existirá solamente una pequeña capacidad de infiltración en esta unidad, consistiendo de 0.13 mm/hr . Se considera proveer una tasa de sustracción de escorrentía durante las tormentas, mediante bombeo, equivalente a $q/a = 30$. Para esta tasa, la Figura 6 sugiere la capacidad expresada por $b/E[R] = b/a = 0.78$. La capacidad de almacenaje requerida estaría dada por $b =$

$0.78/\alpha = 9.9 \text{ mm}$. Considerando el área contribuyente, el volumen de capacidad de la charca se obtendría como $b \cdot \text{Área} = 198 \text{ m}^3$. De la misma forma, la tasa de bombeo requerida se obtiene como $q \cdot \text{Área} = 0.022 \text{ m}^3/\text{s}$.

Primordialmente, el modelo probabilístico permite la estimación del riesgo hidrológico asociado a un diseño de un sistema de retención, en cuya evaluación también podrían incorporarse observaciones de campo sobre el estado usual del sistema. Este aspecto del modelo se ilustra en la siguiente aplicación:

Aplicación sobre la estimación del riesgo hidrológico para un sistema de retención

Cierto sistema de retención de un sector urbanizado ($C = 0.9$) posee una capacidad de almacenaje equivalente a $b = 7.62 \text{ mm}$. La unidad se ha desbordado varias veces en el pasado y se desea evaluar su eficiencia operacional. El sistema provee para sustraer agua, durante el tiempo entre tormentas, por infiltración u otro proceso a una capacidad nominal de $a = 0.51 \text{ mm/hr}$. Durante la ocurrencia de cualquier tormenta se activa una bomba con una capacidad equivalente a $q = 2.54 \text{ mm/r}$. Se ha observado a través del tiempo que usualmente, en promedio, el sistema se encuentra aproximadamente a mitad de su capacidad al finalizar cualquier evento. Para evaluar el riesgo hidrológico considerando dicha observación de campo, se determina el valor de θ que produce el resultado $E[Z]/b = 0.50$ en la expresión (6). Esta operación obtiene $\theta = -0.01$. El riesgo se computa mediante la expresión (39), siendo el término K_5 definido por la expresión (33). Utilizando la magnitud de los parámetros hidrológicos α , β , γ , definidos en la Tabla 3, se obtiene para el riesgo $P[Y > 0] = 37\%$. El riesgo computado refleja la probabilidad de que ocurra cierta magnitud de desborde del sistema para cada tormenta.

Análisis del impacto de la impermeabilización sobre la confiabilidad de un sistema de retención

Finalmente, se ilustra una aplicación que permite evaluar el impacto de un desarrollo urbanístico sobre la eficiencia de una unidad de retención existente. Se logra esta evaluación variando la magnitud del coeficiente de escorrentía C . El efecto de la impermeabilización de un terreno sería la reducción de la eficiencia operacional de la unidad.

En la aplicación, se utilizan los parámetros hidrológicos del área hipotética para un sistema de retención con capacidad $b = 17.8 \text{ mm}$ y razones de sustracción $a = q = 0.25 \text{ mm/hr}$. Se varía el coeficiente de escorrentía entre aquel de un área parcialmente desarrollada a una casi completamente impermeabilizada. Los estados de almacenaje del sistema se establecen variando el parámetro θ dentro del intervalo $\{-200, 100\}$. La Figura 7 ilustra los resultados obtenidos con el modelo probabilístico para las dos condiciones.

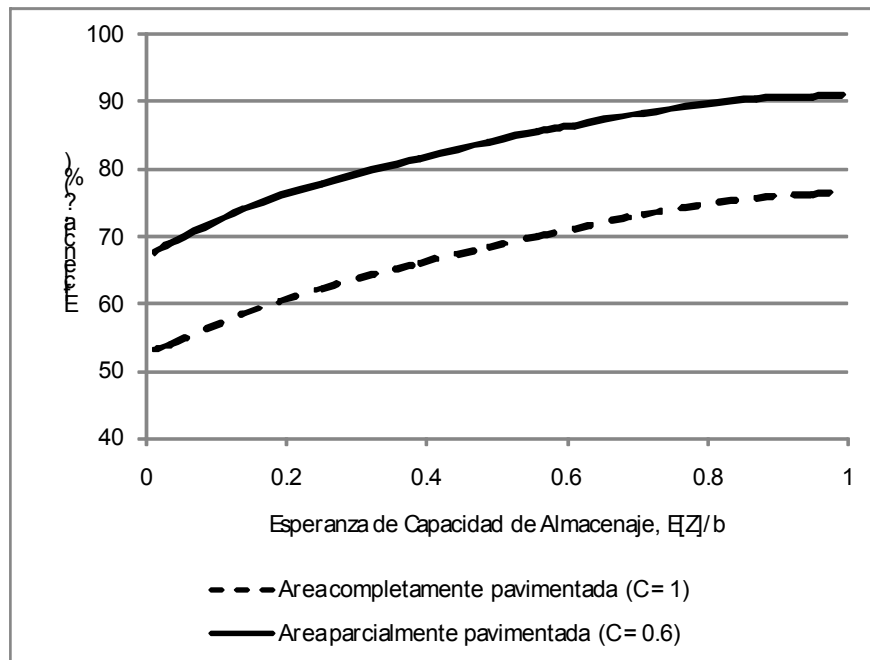


Figura 7: Efecto de impermeabilización del área contribuyente sobre eficiencia operacional del sistema de retención.

La eficiencia se ha relacionado con el valor normalizado del promedio de la capacidad de almacenaje disponible al finalizar la tormenta que precede la de diseño. De esta forma se evalúa todo el rango de posibilidades de la eficiencia operacional del sistema de retención. A manera de ilustración, si se impermeabiliza el área que sirve la unidad de retención, la eficiencia máxima (para $E[Z]/b = 1$) alcanzable de dicho sistema se reduciría de 91% a solamente 76%. Esta última compara con una eficiencia mínima de 68%, esperada para la condición original del área.

Aunque es obvio que la impermeabilización reduciría la confiabilidad de cualquier sistema de retención, la contribución particular del modelo propuesto consiste en permitir la cuantificación de dicho impacto sobre sus características operacionales. Dicha capacidad permitiría una mejor planificación del desarrollo urbanístico de un área al incorporar el posible impacto de tal acción sobre el sistema de manejo de escorrentía que pueda servir a ésta.

CONCLUSIONES

Se ha derivado un modelo probabilístico para el diseño y la evaluación operacional de sistemas de retención de escorrentía que considera la dinámica e incertidumbre del proceso hidrológico mediante una formulación analítica que a la vez permite la pronta evaluación de alternativas de diseño para dichos sistemas. Las variables de diseño se relacionan a los parámetros del proceso hidrológico que describen la ocurrencia, duración y acumulación de precipitación de tormentas. El modelo provee una herramienta práctica para la evaluación de alternativas de manejo de escorrentía en la etapa de planificación de un proyecto.

Uno de los aspectos más significativos del modelo es que éste provee para la evaluación del riesgo y la confiabilidad asociada a un diseño particular de un sistema de retención. Se ha demostrado que la medida de eficiencia operacional de un sistema se relaciona directamente a su riesgo de desbordamiento. A su vez, la confiabilidad de un sistema se ha evaluado en términos del rango de eficiencia operacional que resulta de variar la tasa de sustracción de escorrentía para cierta capacidad de almacenaje.

La comparación de las isocuantas de almacenaje/sustracción, generadas para un caso particular de la metodología, con aquellas derivadas de resultados de simulaciones extensas con modelos numéricos resultó ser muy favorable, revelando un grado aceptable de validación para el modelo. La validación del modelo general requeriría simulaciones más complejas o la obtención de datos de campo levantados de facilidades existentes en donde se halla provisto un monitoreo extenso del proceso.

El proceso simulado se condicionó en el conocimiento de la distribución del estado del sistema previo a la ocurrencia de la tormenta de interés. Los modelos existentes presumen cierto estado de almacenaje fijo o estiman las probabilidades de estado en base a la matriz estacionaria de probabilidades de transición, derivada de la teoría de las cadenas de Markov. Este último procedimiento, aunque teóricamente válido, no considera el efecto de ciertas variables operacionales las cuales en la realidad ejercen un control significativo sobre la dinámica del estado de almacenaje de un sistema de retención y por ende sobre su distribución. La distribución propuesta en el estudio posee un alto grado de flexibilidad al permitir la consideración de todo el rango de estados de almacenaje del sistema.

Investigaciones futuras podrían reevaluar varios aspectos de la metodología propuesta para generalizar la formulación bajo otras consideraciones, con la salvedad de que modelos más complejos posiblemente se desarrollarían a expensas de la simplicidad computacional del modelo original.

RECONOCIMIENTO

Se agradece los comentarios pertinentes del evaluador anónimo sobre el contenido y la redacción del artículo y la colaboración de la estudiante Karen González en el cotejo de la derivación del modelo.

Este trabajo está dedicado a la memoria del Dr. G. V. Loganathan, mentor y amigo, trágicamente perdido en la masacre de Virginia Tech.

SIMBOLOS

- a = tasa de sustracción de escorrentía durante el tiempo entre tormentas, mm/hr
- b = capacidad de almacenaje de la unidad de retención, mm

C = coeficiente de escorrentía
 D = cantidad de escorrentía sustraída del sistema de retención durante la tormenta, mm
 P = acumulación de lluvia de cierta tormenta, mm
 q = tasa de sustracción de escorrentía durante la duración de la tormenta de diseño, mm/hr
 $Q_o = E[R]/E[t_e]$, también equivalente a γ/α
 R = acumulación de escorrentía de cierta tormenta, mm
 S = capacidad de almacenaje del sistema de retención a finalizar la tormenta de diseño, mm
 T = capacidad de almacenaje del sistema de retención al inicio de la tormenta de diseño, mm
 t_e = tiempo entre la ocurrencia de tormentas sucesivas, hr
 t_R = duración de la tormenta de diseño, hr
 U = capacidad potencial de almacenaje disponible en la unidad de retención durante la duración de la tormenta de diseño, mm
 V = cantidad de escorrentía sustraída del sistema de retención durante el tiempo entre tormentas, mm
 W = total de la capacidad disponible en el sistema de retención al finalizar la tormenta anterior a la de diseño (Z) y el volumen potencial extraído durante el tiempo entre tormentas (at_e), mm
 Y = cantidad de desborde del sistema de retención para la tormenta de diseño, mm
 α = inverso del promedio de la acumulación de lluvia, mm^{-1}
 β = inverso del promedio de la duración de las tormentas, hr^{-1}
 γ = inverso del promedio del tiempo entre tormentas sucesivas, hr^{-1}
 θ = parámetro de la distribución de probabilidad de la capacidad de almacenaje disponible en el sistema de retención al finalizar el evento anterior a la tormenta de diseño, mm^{-1}

REFERENCIAS

- Adams, B. J. and Chen, J. (2006). "A framework for urban storm water modeling and control analysis with analytical models", *Water Resources Research*, Vol. 42.
- Adams, B. J. and Papa, F. (2000). *Urban Stormwater Management Planning With Analytical and Probabilistic Models*, John Wiley, Hoboken, New Jersey.
- Benjamin, J. R. and Cornell, C. A. (1970). *Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers*, McGraw Hill, New York.
- Chow, V. T. and Yen, B. C. (1976). "Urban Stormwater Runoff: Determination of Volumes and Flowrates", Environmental Protection Agency, EPA/600/2-76-116, Washington, D.C.
- Delleur, J. W. (1983). "Recent advances in urban hydrology in the U.S.A.", International Symposium on Urban Hydrology, Hydraulics, and Sediment Control, University of Kentucky.
- DiToro, D. M., and Small, M. J. (1979). "Stormwater interception and storage", *Journal of the Environmental Engineering Division*, ASCE, Vol. 105, No 1, pp. 43-54.
- Eagleson, P. S. (1978). "Climate, soil, and vegetation 2. The distribution of annual precipitation from derived from observed storm sequences", *Water Resources Research*, Vol. 14, No 5, pp. 713-721.
- Environmental Protection Agency (1986). "Methodology for Analysis of Residence Basins for Control of Urban Runoff Quality", EPA 440/5-87-001, Washington, D.C.
- Goforth, G. F., Heany, J. P., and Huber, W. C. (1983). "Comparison of basin performance modeling techniques", *Journal of Environmental Engineering*, ASCE, Vol. 109, No 5, pp. 1082-1098.
- Heany, J. P., Huber, W. C., Medina, M. A., Murphy, M. P., Nix, S. J., and Hassan, S. M. (1977). "Nationwide evaluation of combined sewer overflows and urban stormwater discharges: cost assessments and impacts", Environmental Protection Agency, EPA 600/2-77-064, Cincinnati.
- Li, J. Y., and Adams B. J. (1994). "Statistical water quality modeling for urban runoff control planning", *Water Science and Technology*, Vol. 29, No 1-2, pp. 181-190.
- Li, J. Y., and B. J. Adams (2000). "Probabilistic models for analysis of urban runoff control system", *Journal of Environmental Engineering*, ASCE, Vol. 126, No 3, pp. 217-224.
- Loganathan, G. V., and Delleur, J. W. (1984). "Effects of urbanization on frequencies of overflows and pollutant loadings from storm sewer overflows: a derived distribution approach", *Water Resources Research*, Vol. 20, No 7, pp. 857-865.
- Loganathan, G. V., J. W. Delleur, and Segarra, R. I. (1985). "Planning detention storage for stormwater management", *Journal of Water Resources Planning and Management*, ASCE, Vol. 3, No 4, pp. 382-398.

- Nix, S. J. (1982). "Analysis of Storage-Release Systems in Urban Stormwater Quality Management", Ph.D. dissertation, University of Florida, Gainesville.
- Pagán, I. (1984). "Statistical Analyses of Spatial and Temporal Storm Rainfall Characteristics in Puerto Rico", Final Technical Report to the Department of the Interior, University of Puerto Rico Water Resources Research Institute, Mayagüez, Puerto Rico.
- Segarra-García, R., and M. El Basha-Rivera (1996). "Optimal estimation of storage-release alternatives for storm-water detention systems", *Journal of Water Resources Planning and Management*, Vol. 122, No 6, pp.428-436.
- Segarra, R. I., and G. V. Loganathan (1994). "A stochastic pollutant load model for the design of stormwater detention facilities", *Water Science and Technology*, Vol. 29, No 1-2, pp.378-380.
- Segarra, R. I., and G. V. Loganathan (1992). "Storm-water detention storage design under random pollutant loading", *Journal of Water Resources Planning and Management*, ASCE, Vol. 118, No 5, pp. 475-791.
- Segarra, R. I. (2001). "Generation of stormwater storage/release alternatives for nonpoint pollutant load control", Proceedings of the Sixth Caribbean Islands Water Resources Congress, Mayagüez, Puerto Rico, February 2001.